

BAB VI

HUKUM KEKALKAN ENERGI DAN PERSAMAAN BERNOULLI

Tujuan Intruksional Umum (TIU)

Mahasiswa diharapkan dapat merencanakan suatu bangunan air berdasarkan konsep mekanika fluida, teori hidrostatika dan hidrodinamika.

Tujuan Intruksional Khusus (TIK)

1. Mahasiswa dapat menjelaskan prinsip persamaan Euler
2. Mahasiswa dapat merumuskan persamaan Bernoulli untuk aliran dalam pipa
3. Mahasiswa dapat menghitung besarnya energi dan kehilangan energi aliran dalam pipa
4. Mahasiswa dapat membuat diagram garis energi dan garis tekanan aliran dalam pipa

6.1. Pendahuluan

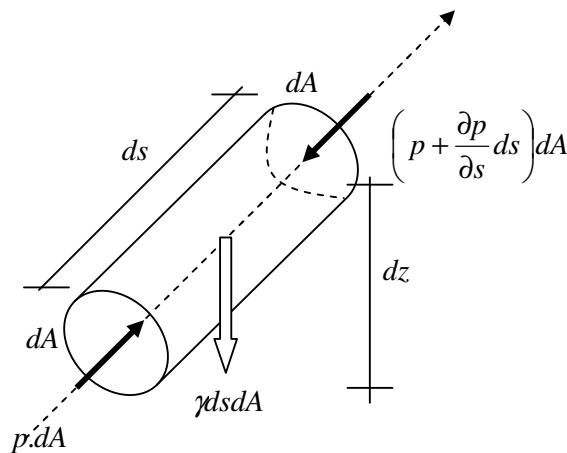
Pada zat cair diam (*hydrostatic*), gaya-gaya yang bekerja dapat dihitung dengan mudah, karena dalam hidrostatika hanya bekerja gaya tekanan yang sederhana. Pada zat cair mengalir (*hydrodynamic*), permasalahan menjadi lebih sulit. Faktor-faktor yang diperhitungkan tidak hanya kecepatan dan arah partikel, tetapi juga pengaruh kekentalan (*viscosity*) yang menyebabkan gaya geser antara partikel-partikel zat cair dan juga antara zat cair dan dinding batas. Gerak zat cair tidak mudah diformulasikan secara matematik, sehingga diperlukan anggapan-anggapan dan percobaan-percobaan untuk mendukung penyelesaian secara teoritis.

Persamaan energi yang menggambarkan gerak partikel diturunkan dari persamaan gerak. Persamaan energi ini merupakan salah satu persamaan dasar

untuk menyelesaikan masalah yang ada dalam hidraulika. Persamaan energi dapat ditunjukkan oleh persamaan Euler dan persamaan Bernoulli.

6.2. Persamaan Euler

Gambar 6.1 menunjukkan elemen berbentuk silinder dari suatu tabung arus yang bergerak sepanjang garis arus dengan kecepatan dan percepatan di suatu titik dan waktu tertentu adalah V dan a . Panjang, tampang lintang, dan rapat massa elemen tersebut adalah ds , dA , dan ρ sehingga berat elemen satuan adalah $ds \cdot dA \cdot \rho g$. Oleh karena tidak ada gesekan maka gaya-gaya yang bekerja hanya gaya tekanan pada ujung elemen dan gaya berat. Hasil kali dari massa elemen dan percepatan harus sama dengan gaya-gaya yang bekerja pada elemen tersebut.



Gambar 6.1 Elemen zat cair bergerak sepanjang garis arus

$$F = M a \text{ (Hukum Newton II)} \quad (6.1)$$

Dengan memperhitungkan gaya-gaya yang bekerja pada elemen, maka hukum Newton II untuk gerak partikel disepanjang garis arus menjadi :

$$-\rho g ds dA \cos \alpha + p dA - (p + \frac{\partial p}{\partial s} ds) dA = \rho ds dA a \quad (6.2)$$

Persamaan di atas dibagi dengan $ds dA$ menjadi:

$$-\rho g \cos \alpha - \frac{\partial p}{\partial s} ds = \rho a \quad (6.3)$$

Oleh karena :

$$\cos \alpha = \frac{\partial z}{\partial s} \quad (6.4)$$

Dan kemudian substitusi persamaan (6.4) dan (6.2) untuk percepatan ke dalam persamaan (6.3) di atas, maka akan di dapat:

$$-\rho g \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial p}{\partial s} = \rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s} \right)$$

atau

$$g \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + V \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (6.5)$$

Untuk aliran *steady*, diferensial terhadap waktu adalah nol, sehingga:

$$g \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + V \frac{\partial V}{\partial s} = 0 \quad (6.6)$$

Oleh karena variabel-variabel dari persamaan di atas adalah hanya tergantung pada jarak s , maka diferensial parsial dapat di ganti oleh diferensial total:

$$g \frac{dz}{ds} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} + V \frac{dV}{ds} = 0$$

Apabila masing-masing suku dikalikan dengan ds maka akan di dapat:

$$g dz + \frac{dp}{\rho} + V dV = 0 \quad (6.7)$$

Persamaan (6.7) dikenal dengan persamaan Euler untuk aliran *steady* satu dimensi untuk zat cair ideal.

6.3. Persamaan Bernoulli

Apabila kedua ruas dari persamaan (6.7) di bagi dengan g dan kemudian diintegrasikan maka akan di dapat hasil berikut ini:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = C \quad (6.8)$$

dengan:

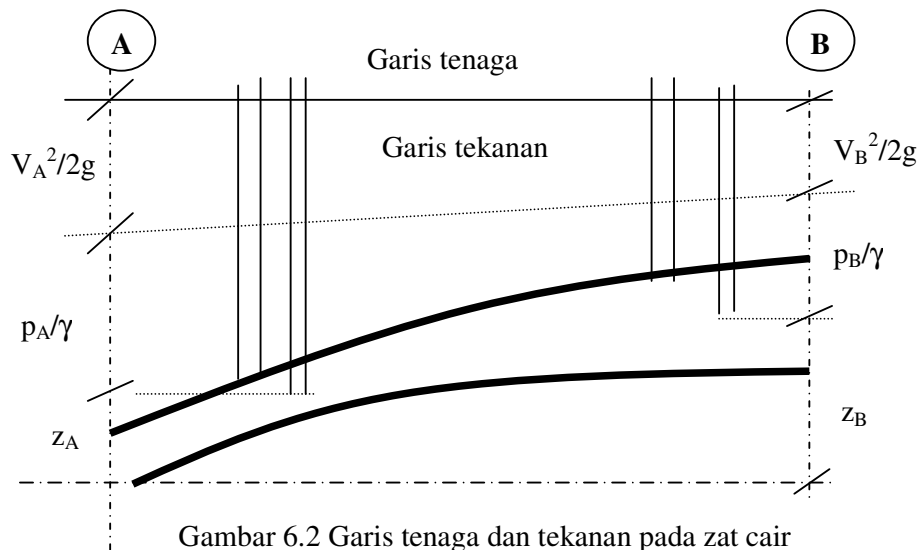
z = elevasi (tinggi tempat)

$\frac{p}{\gamma}$ = tinggi tekanan

$\frac{V^2}{2g}$ = tinggi kecepatan

Konstanta integral C adalah tinggi energi total, yang merupakan jumlah dari tinggi tempat, tinggi tekanan, dan tinggi kecepatan, yang berbeda dari garis arus yang satu ke garis arus yang lain. Oleh karena itu persamaan tersebut hanya berlaku untuk titik-titik pada suatu garis arus. Persamaan (6.8) dikenal dengan persamaan Bernoulli pada aliran *steady* satu dimensi untuk zat cair ideal dan tak mampu mampat. Persamaan tersebut merupakan bentuk matematis dari kekekalan energi di dalam zat cair.

Persamaan Bernoulli dapat digunakan untuk menentukan garis tekanan dan tenaga (Gambar 6.2).



Gambar 6.2 Garis tenaga dan tekanan pada zat cair

Garis tenaga dapat ditunjukkan oleh elevasi muka air pada tabung pitot yang besarnya sama dengan tinggi total dari konstanta Bernoulli. Sedang garis tekanan dapat ditunjukkan oleh elevasi muka air di dalam tabung vertikal yang disambung pada tepi pipa.

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} \quad (6.9)$$

Pada aliran zat cair ideal, garis tenaga mempunyai tinggi tetap yang menunjukkan jumlah dari tinggi elevasi, tinggi tekanan, dan tinggi kecepatan. Garis tekanan menunjukkan jumlah dari tinggi elevasi dan tinggi tekanan ($z + p/\gamma$) yang bisa naik atau turun pada arah aliran dan tergantung pada luas tampang aliran. Pada titik A dimana tampang aliran lebih kecil dari titik B akan menyebabkan tinggi kecepatan di A lebih besar daripada di B, mengingat V_A lebih besar dari V_B . Akibatnya tinggi tekanan di titik A lebih kecil dari B, karena

diameter sepanjang pipa tidak seragam maka pada Gambar 6.2 garis tekanan berupa garis lengkung.

Tinggi tekanan di titik A dan B yaitu $h_A = p_A / \gamma$ dan $h_B = p_B / \gamma$ adalah tinggi kolom zat cair yang beratnya tiap satuan luas memberikan tekanan sebesar $p_A = \gamma h_A$ dan $p_B = \gamma h_B$. Oleh karena itu tekanan p yang ada pada persamaan Bernoulli biasa disebut dengan tekanan statis.

Aplikasi persamaan Bernoulli untuk kedua titik di dalam medan aliran akan memberikan:

$$z_A + \frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} = z_B + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} \quad (6.10)$$

persamaan (6.10) menunjukkan bahwa jumlah tinggi elevasi, tinggi tekanan dan tinggi kecepatan di kedua titik adalah sama. Dengan demikian garis tenaga pada aliran zat cair ideal adalah konstan.

6.4. Kehilangan Energi

Pada fluida nyata (riil) aliran yang terjadi akan mengalami gesekan dengan dinding pipa, sehingga akan mengalami kehilangan energi. Kehilangan energi dapat dibedakan menjadi:

1. Kehilangan energi primer (h_f) adalah kehilangan energi karena gesekan dengan dinding batas/pipa.
2. Kehilangan energi sekunder (h_e) adalah kehilangan energi karena perubahan tampang lintang aliran.

Pada pipa yang sangat panjang kehilangan energi primer jauh lebih besar dari pada kehilangan energi sekunder, sehingga kehilangan energi sekunder diabaikan.

Jadi persamaan Bernoulli untuk fluida nyata dapat dituliskan sebagai berikut:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \sum h_f + \sum h_e \quad (6.11)$$

Besarnya kehilangan energi primer akibat gesekan pada pipa dapat ditentukan sebagai berikut:

$$h_f = k \frac{v^2}{2g} \text{ dimana } k = f \frac{L}{D} \quad (6.12)$$

$$f = 0,02 + \frac{0,0005}{D} \quad (6.13)$$

Dimana:

D = diameter pipa (m)

L = panjang pipa (m)

v = kecepatan aliran (m/det)

g = gravitasi (m/det²)

f = koefisien kehilangan energi gesekan pipa

Kehilangan energi sekunder dapat diakibatkan karena adanya perubahan penampang pipa, belokan pipa, katup, dan lain-lain. Besarnya kehilangan energi sekunder dirumuskan sebagai berikut:

$$h_e = k \frac{v^2}{2g} \quad (6.14)$$

dimana :

v = kecepatan aliran (m/det)

g = percepatan grafitasi (m/det^2)

k = koefisien kehilangan energi sekunder

Besarnya nilai k untuk kehilangan energi sekunder tergantung oleh jenis penyebab kehilangan energinya.

Tabel 6.1. Koefisien kehilangan energi akibat perubahan penampang (k_1)

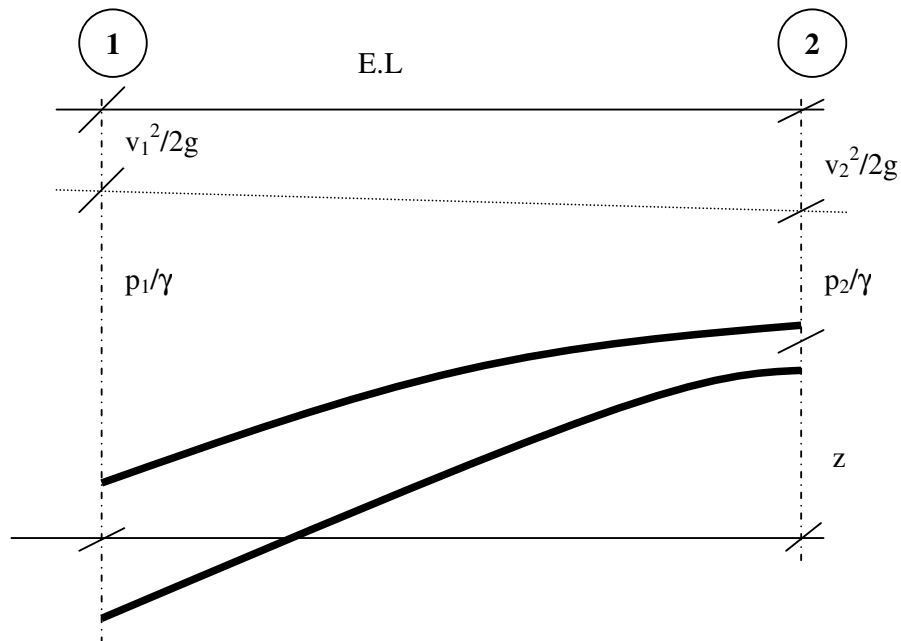
$(D_1/D_2)^2$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
k_1	0,5	0,48	0,45	0,41	0,36	0,29	0,21	0,13	0,07	0,01	0,0

Tabel 6.2. Koefisien kehilangan energi akibat belokan (k_2)

Sudut ($^\circ$)	5	10	15	22,5	30	45	60	90
k_2 Halus	0,016	0,034	0,042	0,066	0,130	0,236	0,471	1,129
k_2 Kasar	0,024	0,044	0,062	0,154	0,165	0,320	0,684	1,265

6.5. Pelatihan

1). Suatu pipa mempunyai luas tampang yang mengecil dari diameter 0,3 m (tampang 1) menjadi 0,1 m (tampang 2). Selisih tampang 1 dan 2 adalah z dengan posisi seperti Gambar.



Pipa mengalirkan air dengan debit aliran 50 l/detik. Tekanan ditampang 1 adalah 2 kg/cm². Apabila tekanan pada tampang 2 tidak boleh lebih kecil dari 1 kg/cm². Apabila kehilangan energi dapat diabaikan dan g = 9,81 m/det². Hitung nilai z - nya !

Penyelesaian

$$D_1 = 0,3 \text{ m}$$

$$D_2 = 0,1 \text{ m}$$

$$Q = 50 \text{ l/det} = 0,05 \text{ m}^3/\text{det}$$

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0,05}{\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 0,3^2} = 0,707 \text{ m/det}$$

$$v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0,05}{\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 0,1^2} = 6,366 \text{ m/det}$$

Tekanan dan tinggi tekan :

$$p_1 = 2 \text{ kg/cm}^2 = 20 \text{ ton/m}^2$$

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{20}{1} = 20 \text{ m}$$

$$p_2 = 1 \text{ kg/cm}^2 = 10 \text{ ton/m}^2$$

$$\frac{p_2}{\gamma} = \frac{10}{1} = 10 \text{ m}$$

Dengan mengambil garis melalui tampang 1 sebagai referensi, maka persamaan

Bernauli dapat dituliskan sebagai berikut :

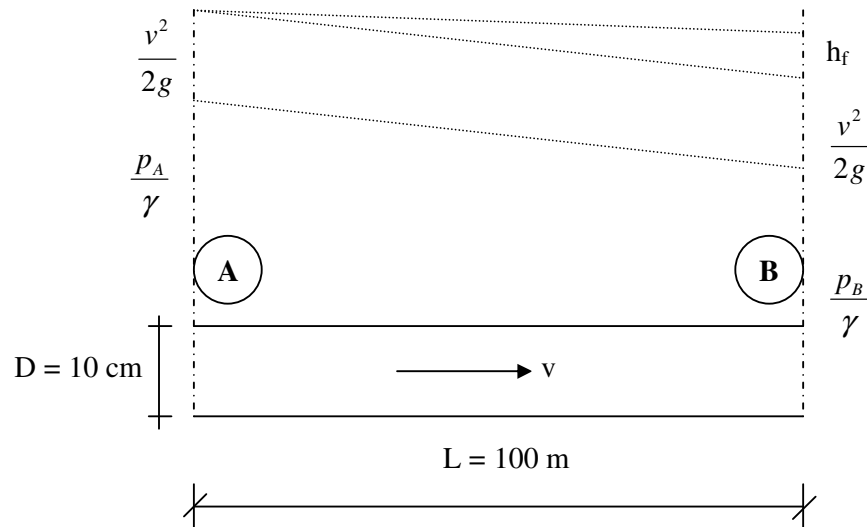
$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$0 + 20 + \frac{0,707^2}{2g} = z + 10 + \frac{6,366^2}{2g}$$

$$z = 7,96m$$

Jadi nilai z nya adalah 7,96 meter.

2.) Air mengalir melalui pipa sepanjang 100 m dan berdiameter 10 cm dari titik A menuju ke titik B. koefesien gesekan $f = 0,015$. Perbedaan tekanan di A dan B adalah 1 kg/cm^2 . Hitung debit alirannya.



Penyelesaian

Koefesien gesekan $f = 0,015$

Perbedaan tekanan antara A dan B

$$\begin{aligned} \Delta p &= 1 \text{ kg/cm}^2 \\ &= 10.000 \text{ kg/m}^2 \end{aligned}$$

Persamaan bernoulli antara titik A(1) dan B(2) adalah

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_f$$

Karena pipa horisontal maka ($z_1 = z_2$) dan kecepatan aliran sepanjang pipa aliran adalah sama, $v_1 = v_2$.

Maka persamaan di atas dapat ditulis menjadi :

$$h_f = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{\Delta p}{\gamma}$$

Sehingga

$$f \frac{L V^2}{D 2g} = \frac{\Delta p}{\gamma}$$

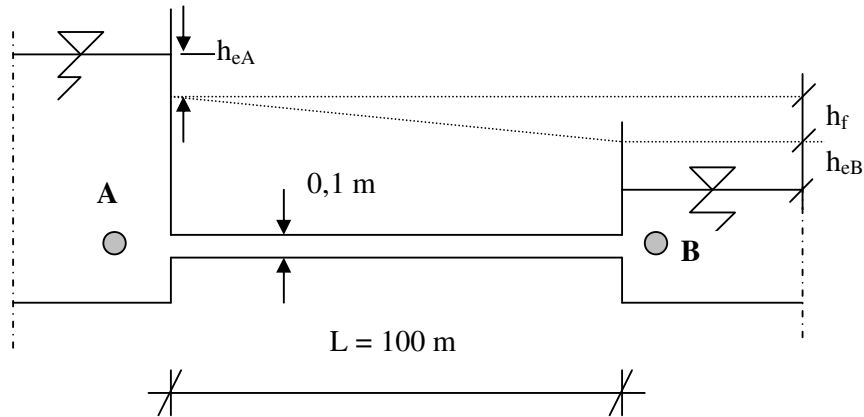
$$0,015 \times \frac{100}{0,1} \times \frac{v^2}{2 \times 9,8} = \frac{10.000}{1000}$$

$$v = 3,617 \text{ m/det}$$

Debit aliran adalah :

$$\begin{aligned} Q &= A \cdot v \\ &= \frac{1}{4} \times \pi \times 0,1^2 \times 3,617 \\ &= 0,0284 \text{ m}^3/\text{det} \end{aligned}$$

3.) Air mengalir dari kolam A menuju kolam B melalui pipa sepanjang 100 meter dan berdiameter 10 cm. Perbedaan elevasi muka air kedua kolam adalah 5 meter. Koefisien gesekan pipa $f = 0,015$, sedangkan koefisien kehilangan energi akibat perubahan penampang pada sambungan kolam A dan kolam B adalah $k_A = 0,5$ dan $k_B = 1$. Hitunglah debit aliran yang terjadi.



Penyelesaian

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{v_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{v_B^2}{2g} + h_{eA} + h_f + h_{eB}$$

Karena titik A dan B memiliki elevasi yang sama, maka $z_A = z_B$ dan $v_A = v_B = 0$

(tampang aliran di A dan B sangat besar)

Persamaan di atas dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\frac{p_A}{\gamma} - \frac{p_B}{\gamma} = h_{eA} + h_f + h_{eB}$$

$$5 = k_A \frac{v^2}{2g} + f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} + k_B \frac{v^2}{2g}$$

$$5 = 0,5x \frac{v^2}{2g} + 0,015x \frac{100}{0,1} x \frac{v^2}{2g} + 1,0x \frac{v^2}{2g}$$

$$5 = 16,5 \frac{v^2}{2g}$$

$$v = 2,438 \text{ m/det}$$

Debit aliran

$$Q = A \times v$$

$$= \frac{1}{4} \times 0,1^2 \times 2,438 = 0,0192 \text{ m}^3/\text{det}$$

